Inhaltsverzeichnis

1 Das elektromagnetische Feld im engeren Sinn

- innere Orientierungen!
- elektrische Spannung $U(\mathcal{C})$
- magnetischer Fluss $\Phi(\mathcal{A})$
- lineare Zuordnungen Gln. (2.1), (2.2)
- dynamische Kopplung zwischen den beiden über Induktionsgesetz (2.3)
- Satz vom magnetischen Hüllenfluß (2.4)
- aufgrund der *Additivität* lassen sich die genannten Eigenschaften auch ausdrücken als (2.5)
- Satz von Stokes auf Induktionsgesetz angewendet liefert den lokalen Ausdruck des Induktionsgesetzes (2.8)
- Satz von Gauß auf Satz vom magn. Hüllenfluß angewendet liefert über

$$\Phi(\partial\mathcal{V}) = \int\limits_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}A = \int\limits_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}V + \int\limits_{\mathcal{S}'} \vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] \, \mathrm{d}A = 0$$

  dessen lokalen Ausdruck (2.9)

2 Das Strom-Ladungs-Feld

- äußere (transversale) Orientierungen!
- elektrische Stromstärke $I(\mathcal{A})$
- elektrische Ladung $Q(\mathcal{V})$
- lineare Zuordnungen Gl. (2.10)
- Erhaltung der elektrischen Ladung (2.11)
- aufgrund der *Additivität* lassen sich die genannten Eigenschaften auch ausdrücken als (2.12), (2.13)
- Satz von Gauß auf Ladungserhaltung angewendet liefert dessen lokalen Ausdruck, die *Kontinuitätsgleichung* und zugehörige Sprungbedingung ohne Flächenströme (2.15)
- magnetische Spannung $V(\mathcal{C})$
- elektrischer Fluß $\Psi(\mathcal{A})$
- lineare Zuordnungen Gl. (2.16)
- Ampère-Maxwell-Satz (2.17)
- Satz vom elektrischen Hüllenfluß (2.18)
- Integraldarstellungen (*Additivität*) Gl. (2.19)
- mit den Integraltransformationen folgen der lokale Ausdruck des Ampère-Maxwell-Satzes (2.22) und des Satzes vom elektrischen Hüllenfluß (2.23)

3 Konvektion elektrischer Ladungen

- Voraussetzung: dominant elektrisches Feldsystem
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho$
- Materialgleichungen
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} + \varrho \vec{v}$$
homogenes (γ, ε unabhängig vom Ort bzw. von der Zeit), *isotropes* (γ, ε Skalare), *lineares* (γ, ε hängen nicht selbst von $\vec{E}$ ab) Material vorausgesetzt
- $\vec{J}$ lässt sich dann eliminieren, es folgt die *Relaxationsgleichung* (3.103)
$$\begin{aligned} \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) &= -\partial_t \varrho \\ \partial_t \varrho + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \varrho &= 0 \end{aligned}$$
- bezogene Form (3.104) mit der *Relaxationszeitkonstanten* $T_R = \varepsilon/\gamma$ und der elektrischen Reynoldszahl R_e (3.105)
- Ladungsrelaxation ohne Bewegung, dh $\vec{v} = \vec{0}$, es folgt
$$T_R \partial_t \varrho + \varrho = 0$$
eine (eigentlich partielle) Differentialgleichung erster Ordnung in $\varrho(\vec{r}, t)$ mit der einfach anzugebenden Lösung
$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho_0(\vec{r}) e^{-t/T_R}, \quad \text{mit } \varrho_0(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}, 0)$$

4 Laplace-Gleichung in 3-dim. kart. Koordinaten

- $\nabla^2 \varphi = 0$
- Separationsansatz $\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$ ergibt
$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0$$
- Division durch XYZ liefert
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$
also drei Terme, die *nur* von x, y oder z abhängen, dh man kann die beiden anderen jeweils einer reellen Konstanten setzen
$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = k^2 \\ \frac{Y''}{Y} &= -k^2 - \frac{Z''}{Z} = l^2 \\ \frac{Z''}{Z} &= -(l^2 + k^2) = -m^2 \end{aligned}$$

- wichtig ist bei der dritten Gleichung das $-m^2$, da man daraus eine periodische Lösung in z erhält, die allgemeinen Lösungen ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx} \\ Y(y) &= B_1 e^{lx} + B_2 e^{-lx} \\ Z(z) &= C_1 \sin(mz) + C_2 \cos(mz) \end{aligned}$$

- die allgemeinen Lösungen erhält man jeweils mit den Ansätzen $X(x) = e^{\lambda x}$ etc. und anschließender Überlagerung der beiden Lösungen
- man kann die Konstanten beliebig wählen, aus der Problemstellung kann man ableiten, von welchen Koordinaten die Lösung exponentiell ($X''/X = k^2$) bzw. periodisch ($X''/X = -k^2$) abhängen soll

5 Poynting-Satz aus Maxwell-Gleichungen

- Maxwell-Rotorgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D} \tag{2}$$

- Gl. (1) mit $\vec{H}$, Gl. (2) mit $\vec{E}$ erweitern liefert

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} \tag{3}$$

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} \tag{4}$$

- die so erhaltene Gl. (4) von Gl. (3) subtrahieren

$$\underbrace{\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} = -\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} \tag{5}$$

- wichtig dabei ist die Herleitung des linken Teils der obigen Gl. (5), wobei der Index c bedeutet den jeweiligen Vektor als konstant zu betrachten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_c \times \vec{H}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_c) \\ &= \vec{E}_c \cdot (\vec{H} \times \vec{\nabla}) + \vec{H}_c \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &= \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

  dabei wurde beachtet: zyklische Vertauschung des Spatproduktes (Tab. 1.1: Zeile 1), Vektorprodukt ist antikommutativ $a \times b = -b \times a$

- Integration über einen räumlichen Bereich liefert die globale Form des Poynting-Satzes (2.109), bei $\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, \mathrm{d}V$ wird der Satz von Gauß (1.44) angewendet
- zur Interpretation: in einem homogenen, isotropen, linearen Medium gelten die Verknüpfungsbeziehungen

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

  weiters gilt allgemein wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)]^2 = \frac{\mathrm{d}[x(t)x(t)]}{\mathrm{d}t} = \dot{x}x_c + x_c\dot{x} = 2x\dot{x}$

$$\vec{X} \cdot \partial_t \vec{X} = \frac{1}{2} \partial_t (X^2)$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{V}} \partial_t\left(\frac{\varepsilon}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2\right) \mathrm{d}V &= \dot{W}(\mathcal{V}), \quad \text{im mag. und el. Feld gespeicherte Energie} \\
\int\limits_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, \mathrm{d}A &= Q(\partial\mathcal{V}), \quad \text{Energiefluß durch die Hülle} \\
-\int\limits_{\mathcal{V}} \gamma E^2 \, \mathrm{d}V &= R(\mathcal{V}), \quad \text{Joule-Verluste}
\end{aligned}$$

- Energiebilanz allgemein: $\dot{W}(\mathcal{V}) + Q(\partial\mathcal{V}) = R(\mathcal{V})$

Literatur

[1] A. Prechtl, *Vorlesungen über Theoretische Elektrotechnik*, Zweiter Teil Elektrodynamik, Wien, 1998

[2] A. Prechtl, *Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik*, Band 1, Springer-Verlag, 1994

[3] A. Prechtl, *Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik*, Band 2, Springer-Verlag, 1995