Mathematik 1 f. ET
(StPl 2000)

26. Juni 2002

1. Man zerlege in Partialbrüche:

$$r(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}.$$

2. Man berechne

$$I = \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx.$$

3. Man formuliere den Mittelwersatz der Differentialrechnung und den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Mittelwertsätzen?

4. Was ist eine Äquivalenzrelation in einer Menge M?

Anworten:

1. Der Koeffizient des Hauptteils zur einfachen Wurzel $x = k$ $(0 \le k \le 7)$ ist

$$\frac{1}{k(k-1)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(k-7)} = \frac{(-1)^{7-k}}{k!(7-k)!} = \frac{(-1)^k}{7!}\binom{7}{k} \Rightarrow r(x) = \frac{1}{7!}\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{k}\frac{1}{x-k}.$$

2. $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-x^2}dx = \int_0^\infty x e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}.$

3. Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenziarbar auf $]a,b[$. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in\,]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$. Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, so gibt es eine Stelle $\xi \in\,]a,b[$ mit ${}_a\int^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist der Mittelwertwertsatz der Differentialrechnung für eine Stammfunktion des Integranden: $(b-a)f(\xi) = (b-a)F'(\xi) = F(b) - F(a) = {}_a\int^b f(x)dx$.

4. Eine Äquivalenzrelation in M ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation $R \subseteq M \times M$.

- reflexiv: $\forall x \in M \;\Rightarrow\; (x,x) \in R$;
- symmetrisch: $(x,y) \in M \;\Rightarrow\; (y,x) \in R$;
- transitiv: $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \;\Rightarrow\; (x,z) \in R$.